Fig. 1.

E N n o D M m A P p C a d e

Fig. 2.

V N K H L

Fig. 3.

K k E N H i h G L I A C a F n e

Fig. 4.

K C D F I A S B H L E G

Fig. 5.

J. Mynde sc.

V. Investigationes *aliquot, ex quibus probetur* Terræ figu am *secundum Leges attractionis in ratione inversâ quadrati distantiarum maximè ad Ellipsin accedere debere, per Dn.* Alexin Clairaut, *Reg. Societ.* Lond. *& Reg. Scient. Acad.* Paris. *Soc.*

TAB. II. FIG. I.

I. EX principiis mathematicis Philosophiæ naturalis Newtonianæ (Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. & Prop. XIX. Lib. 3.) si Sphærois Elliptica ex particulis constans fluidis & homogeneis sese mutuo attrahentibus in ratione inversa quadrati distantiarum circa suum axem A *a* revolvatur, quò columnæ CE, CN, CA, ex quibus conflatur ista Sphærois, in æquilibrio constituantur, sicque Sphæroïdi semper eadem habeatur figura, necesse est ut gravitas in superficiei quocumque puncto N, sit in ratione inversâ radii CN.

Ut igitur sciamus an Sphærois gaudeat hâc proprietate, nunc quæramus qualem patiatur attractionem quodcumque Corpusculum N, totius Sphæroidis secundum directionem CN; atque ex ista attractione subducemus illam vis centrifugæ partem, quæ provenit ex rotatione Sphæroidis secundum CN agentis, & quæramus an vis residua sit proportionalis ipsi $\frac{1}{CN}$. Ideo quæremus primó Sequentia problemata; Cumque is nobis sit animus inventa applicare ad Terræ Sphæroidem,

dem, quam Sphæræ parum dissimilem esse apud omnes constat, computa nostra erunt iis Sphæroidibus aptanda, quarum axis maximus minorem superat quam minimâ quantitate.

PROBLEMA PRIMUM.

2. *Attractionem invenire, quam Sphærois* AEaE, *â Sphærâ quàm parum dissidens exercet in Corpusculum situm ad Polum* A.

Ad Solutionem hujus Problematis repetendum esset Corollarium 2um Prop. 91. Princip. Math. Philos. nat. ex quo discas modum inveniendi Sphæroidis cujuscumque attractionem, si substituas scilicet in valore generali pro CE quantitatem, quæ infinitè parùm differat ab AC; sed cum in isto casu multò facilius evadat problema, modo sequenti solvemus.

Sit AMDad Sphæra, cujus radius est AC: quæremus attractionem Spatii orti ex revolutione ADaE, quæ attractio attractioni Sphæræ addita dat quæsitam attractionem.

Ad inveniendam attractionem Spatii ex revolutione ANEaDM orti, sint AC, r, DE, αr, AP, u, ex naturâ Ellipseos erit NM $= \alpha \sqrt{2ru - uu}$; ex naturâ verò circuli AM $= \sqrt{2ru}$. Spatium verò ortum ex revolutione NnmM erit $\frac{\alpha c}{r} \cdot \overline{2ru - uu} \cdot du$ cum sit, c circumferentia, r verò radius.

Propter parvitatem ipsius NM, particulas omnes materiæ isto in Spatio conclusas habere licebit tanquam æqualiter attrahentes corpusculum in A: quare parvi istius spatii attractionem habebis, si soliditatem illius per at-

attractionem in M multiplices, atqui ista attractio in M debet esse $\frac{1}{AM^2} \times \frac{AP}{AM}$. Habebis ergo analyticè $\frac{u}{2ru\sqrt{2ru}} \cdot \frac{\alpha c}{r} \cdot 2ru - uu \cdot du = \frac{\alpha c}{2rr\sqrt{2r}}$ $(2rdu\sqrt{u} - udu\sqrt{u})$ cujus integralis $\frac{\alpha c}{2rr\sqrt{2r}}(\frac{4}{3}ru\sqrt{u} - \frac{2}{5}uu\sqrt{u})$ est attractio spatii orti ex revolutione ANM. Quo in valore si facias $u = 2r$, habebis per reductionem $\frac{8}{15}c\alpha$. Unde totius spatii AEaC exprimitur attractio, addendo postea $\frac{2}{3}c$ pro totius Sphæræ attractione. Habebis $\frac{2}{3}c + \frac{8}{15}c\alpha$ Ellipsoidis attractionem.

3. Coroll. Si oblongatum Sphæroidem habere velis, α erit negativus, summa verò attractionis erit $\frac{2}{3}c - \frac{8}{15}c\alpha$.

4. Nota. Si prædicta Sphærois loco circularium elementorum in PN exsurgentium aliis constaret elementis, v. gratiâ Ellipticis, quæ non magis quam Ellipsis AE à circulo discreparent, & quibus eadem quæ circulis PN esset superficies, eadem, ut patet, semper esset attractio, quia in istis elementis PN, quæcumque vis residua esset, circulis PM sublatis, haberetur tanquam conflata ex partibus quæ eandem ac in eam Ellipsoidis attractionem haberent, ratione habitâ parvitatis NM, æquabilisque quantitatis materiæ.

LEMMA. TAB. II. FIG. 2.

5. Sint KL circulus, H centrum circuli, VH perpendicularis in areâ circuli, NH verò linea æqualis perpendiculari VH, quæ faciat angulum infinitè parvum, vel perexiguum cum illâ, dico attractionem circuli KL in N haberi posse absque errore sensibili, tanquam attractionem ipsius circuli in V, sive, quod idem est,

aliam

aliam attractionem ab altera non differre nisi quantitate infinitè minore respectu utriusque quam VN minor est respectu HV.

Quæ propositio ut demonstretur, ostendendum est, duobus corpusculis ad extremitatem constitutis alicujus Diametri KL unam esse vim attractivam in N, & aliam vim in V, quarum summa haberi potest eadem. Atqui neglectâ computatione ad habendam attractionem corporis in K positi in corpusculum N, facilè videas illud idem futurum esse cum attractione in V, cui addita foret insuper parva quantitas, quam ingrederetur NV. Similiter etiam videas attractionem corporis positi in L in corpusculum N eandem fore cum attractione in V, sublata eadem parva quantitate. Ideoque harumce ambarum attractionum summa una & eadem est.

6. Coroll. Si loco circuli KL esset certa Ellipsis, sive quædam alia curva linea, quæ discreparet quàm parum à Circulo, ex iisdem argumentis, quæ jam attulimus art. 4. facile colligitur locum semper fore propositioni prædictæ.

THEOREMA PRIMUM.

TAB. II. FIG. 3.

7. Sit AF*ae* Elliptica Sphærois, cujus sit A*a* axis revolutionis: dico quam attractionem hæc Sphærois exercet in corpusculum in N positum, eandem esse cum illâ attractione, quam exercet quæcumque Sphærois cujus esset Polus N, axis revolutionis N*n*, axis vero secundus radius circuli, cui eadem esset superficies ac Ellipsi FG sectioni Ellipsoidos AE*ae* per planum aliquod perpendiculariter erectum in FG Diametrum conjugatam ipsius.

Quod

Quod ut demonstremus, imaginemur innumera elementa KL, quæ sint parallela ad Ellipsim FG, id est quæ sint omnia erecta in ordinatas ad Diametrum. Evidens est quod Sphærois AE*ae* in eo tantum a Sphæroide prædicta dissidebit, quòd in prima omnia elementa faciant angulum cum CN ab angulo recto discrepantem angulo infinitè parvo, in secunda vero Elementa omnia angulum rectum faciant absque ullo discrimine, cum in utraque Sphæroide Elementa superficiem habeant eandem. Atqui ex propositione præcedenti uniuscujusque Elementi KL in N attractio quasi eadem censetur in utroque Casu; quod spectat vero crassitiem Elementorum K*kl*L, licet sumere H*h* pro perpendiculari *hi* propter parvitatem anguli *ih*H; utriusque ideo Sphæroidis attractiones totales, altera in alterius vicem sumi poterunt.

Problema Secundum.

8. *Invenire attractionem Sphæroidis* AE *ae in corpusculum quocumque in puncto* N *positum.*

Sint AC $=a$, CE $=b$, CN $=r$, CG Diameter conjugata CN erit $\frac{ab}{r}$ (quando a & b quamminimè inter se differunt,) oportet ex propositione præcedenti quærere attractionem Sphæroidis, cujus major axis sit r, minor vero $\sqrt{\frac{abb}{r}}$, sive $b\sqrt{\frac{a}{r}}$.

Ad hoc adhibenda est formula, quam invenimus (Problemate 1°) $\frac{2}{3}c - \frac{8}{15}c\alpha$, sive $\frac{2}{3}pr - \frac{8}{15}pr\alpha$ (ponendo pr pro c) in locum α vero hac in formula substituendum est $\frac{r - b\sqrt{\frac{a}{r}}}{r} = 1 - \frac{b}{r}\sqrt{\frac{a}{r}}$, sive $\frac{3}{2}n - m$; si $a + ma$ pro b, $a + na$ pro r ponas, atque in computo contemnas gradus secundos magnitudum n et m.

Si

Si ergo $\frac{3}{2}n - m$ in locum α sufficias, formula prædicta evadet $\frac{2}{3}pr - \frac{4}{5}prn + \frac{8}{15}prm$, sive $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{15}pan + \frac{8}{15}pam$; quæ expressio est quæsitæ attractionis Sphæroidis in N.

9. Si $n = o$, tunc habeas $\frac{2}{3}pa + \frac{8}{15}pam$ pro attractione in a, id est ad Polum.

10. Si vero $n = m$, tunc habeas $\frac{2}{3}pa + \frac{6}{15}pam$ pro attractione ad Æquatorem.

Theorema Secundum.

Tab. Fig. 1

11. Sit, ut supra, AE*ae* Sphærois, cujus axes inter se differant quamminimâ quantitate, quam ad majorem perspicuitatem dicam infinitè parvam. Si hæc Sphærois concipiatur esse ex materia fluida ac homogenea, & rotata circum axem A*a*, tempore congruenti, quo æqualis sit columnæ CE gravitas, gravitati columnæ AC, hoc est, ex principiis Newtonianis attractio in E, demtâ vi centrifugâ sit ad attractionem in A, sicut CA ad CE: dico quod omnes columnæ CN, infinitè parvo secundi ordinis deficiente, æquilibrium cum istis duabus columnis servabunt; id est, attractio in N, sublatâ vi centrifugâ simplici effectâ secundùm CN, est ad attractionem in A, sicut CA ad CN.

Ad Demonstrationem eædem serventur denominationes, quas in propositione præcedenti adhibui; quæratur primo vis centrifuga in E, quæ conveniat cum Æquilibrio Columnarum CE, CA.

Propterea sic dicatur $\frac{2}{3}pa + \frac{6}{15}pam - f : \frac{2}{3}pa + \frac{8}{15}pam :: 1 : 1 + m$, unde educitur $f = \frac{8}{15}pam$.

Deinde ad adhibendam gravitatem in N compositam ex attractione, demtâ vi centrifugâ, quærenda est vis centrifuga in N, sive, quod idem est, in M supra

Sphæram,

Sphæram, quia a se invicem non dissidere debent nisi infinite parvo secundi ordinis, si supponatur DE exprimere vim centrifugam f in E, MN exprimet vim centrifugam in N, vires enim centrifugæ sunt ut radii, quando eadem sunt revolutionum tempora, per proprietatem verò Ellipseos fit ut DE : NM : : CE : MP.

Vis autem centrifuga si agat secundum NP, oportet eam reducere secundum NC. NO erit pars residua. Vis igitur centrifuga in N vel in M est ad vim centrifugam in E vel in D, sicut NO est ad DE. Expressio adeo vis centrifugæ in N erit $\frac{8}{15}pan$, ac consequenter expressio gravitatis eodem erit $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{15}pan + \frac{8}{15}pam - \frac{8}{15}pna$, vel $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{3}pna + \frac{8}{15}pam$.

Nunc ad inveniendam vim centrifugam in N quæ sequitur ex Aequilibrio Columnarum, gravitas in A sit oportat ad gravitatem in N, sicut NC ad AC, gravitas in A est $\frac{2}{3}pa + \frac{8}{15}pam$, qua expressione ducta in $\frac{1}{1+n}$ sive $1-n$, post reductionem evadet $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{3}pn + \frac{8}{15}pam$, & eadem quæ supra est expressio. Inde videre licet inter figuram quam obtinere debet Terra ex hypothesi Newtoniana, et Ellipsoïdem non nisi infinite parvum discrimen esse posse. Quantitas enim DE cum sit $\frac{1}{230}$ ma pars AC circiter, in præcedenti Computatione, contemnuntur tantummodo quantitates ejusdem ordinis cum $\frac{1}{230 \cdot 230}$.